Ejercicios Relatividad General. Capítulo 59

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

16 de julio de 2019

1. Calcular el tensor de Ricci

Sea la métrica $\eta_{\mu\nu}$ la métrica de Minkowski y sea $h_{\mu\nu}$ una pequeña perturbación de la métrica, de modo que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con las siguientes propiedades:

1. $h_{\mu\nu}$ es una perturbación pequeña de la métrica; $|h_{\mu\nu}| \ll 1$
2. $h_{\mu\nu}$ es estacionaria; $\partial_0 h_{\mu\nu} = 0$
3. $h_{\mu\nu}$ se mantiene pequeña en una cierta región del espacio; $|\partial_i h_{\mu\nu}| \ll 1$

Entonces los símbolos de Christoffel vienen dados por:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[\partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}\right] \approx \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left[\partial_\alpha h_{\nu\beta} + \partial_\beta h_{\alpha\nu} - \partial_\nu h_{\alpha\beta}\right] \tag{1}$$

Donde he ignorado los términos $h\partial h$ gracias a las propiedades 1 y 3.

Entonces, fijémonos que todos los Christoffel son de orden h, por lo que el producto de dos de ellos será orden h^2 y podremos ignorarlo (de nuevo, debido a las propiedades 1 y 3). Gracias a esto podemos aproximar el tensor de Riemman como

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &\approx \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} & (2)\\ &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\lambda}\left(\partial_{\mu\beta} h_{\lambda\nu} + \partial_{\mu\nu} h_{\beta\lambda} - \partial_{\mu\lambda} h_{\beta\nu}\right) - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\lambda}\left(\partial_{\nu\beta} h_{\lambda\mu} + \partial_{\mu\nu} h_{\beta\lambda} - \partial_{\nu\lambda} h_{\beta\mu}\right) & (3)\\ &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\lambda}\left(\partial_{\mu\beta} h_{\lambda\nu} - \partial_{\mu\lambda} h_{\beta\nu} - \partial_{\nu\beta} h_{\lambda\mu} + \partial_{\nu\lambda} h_{\beta\mu}\right) & (4)\end{aligned}$$

Donde $\partial_{\mu\nu}$ es una abreviación de $\partial_\mu\partial_\nu$. Finalmente el tensor de Ricci viene dado por

$$\begin{aligned} R_{\beta\nu} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu} &\approx \frac{1}{2}\eta^{\alpha\lambda}\left(\partial_{\alpha\beta} h_{\lambda\nu} - \partial_{\alpha\lambda} h_{\beta\nu} - \partial_{\nu\beta} h_{\lambda\alpha} + \partial_{\nu\lambda} h_{\beta\alpha}\right) & (5)\\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_{\alpha\beta} h^{\alpha}{}_{\nu} - \Box h_{\beta\nu} - \partial_{\nu\beta} h + \partial^{\alpha}_{\nu} h_{\beta\alpha}\right) & (6)\end{aligned}$$

Donde $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}$ y $h = h^{\alpha}_{\alpha}$

Fijémonos que hasta ahora no hemos usado la propiedad 2 de h, por lo que esto es general aunque h no sea estacionario (aunque sí se debe cumplir que $\partial_0 h \ll 1$).

Usando ahora la propiedad 2 podemos simplificar el tensor de Ricci a

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \tag{7}$$

$$R_{0j} \approx -\frac{1}{2}\left(\nabla^2 h_{0j} - \partial^i_j h_{0i}\right) \tag{8}$$

$$R_{jk} \approx \frac{1}{2}\left(\partial_{ij} h^i{}_k - \nabla^2 h_{jk} - \partial_{kj} h + \partial^i_k h_{ji}\right) \tag{9}$$

Introduciendo ahora, finalmente, la perturbación $h_{\mu\nu}$ (hasta ahora es completamente general). Tal como lo define Javier: $h_{00} = -\frac{2V(\vec{r})}{c^2}$ y todas las demás valen 0. Por lo que finalmente podemos calcular el Ricci en este caso concreto:

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} = \frac{1}{c^2}\nabla^2 V \tag{10}$$

$$R_{0j} = -\frac{1}{2}\left(\nabla^2 h_{0j} - \partial^i_j h_{0i}\right) = 0 \tag{11}$$

$$R_{jk} = \frac{1}{2}\left(\partial_{ij} h^i{}_k - \nabla^2 h_{jk} - \partial_{kj} h + \partial^i_k h_{ji}\right) = -\frac{1}{2}\partial_{kj} h = \frac{1}{2}\partial_{kj} h_{00} = -\frac{1}{c^2}\partial_{jk} V \tag{12}$$

Para terminar, calculémoslos en un caso conocido, el de una carga puntual, donde $V = -\frac{GM}{r}$, entonces[1]

$$\partial_j V = \frac{GM}{r^3} x_j \tag{13}$$

$$\partial_{ij} V = \frac{GM\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3GMx_j x_i}{r^5} = \frac{GM}{r^3}\left(\delta_{ij} - 3\frac{x_i x_j}{r^2}\right) \tag{14}$$

$$\nabla^2 V = \partial_{xx} V + \partial_{yy} V + \partial_{zz} V = \frac{3GM}{r^3}\left(1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}\right) = 0 \Longrightarrow R_{00} = 0 \tag{15}$$

$$R_{ij} = \frac{GM}{r^3 c^2}\left(3\frac{x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij}\right) \tag{16}$$

2. Cálculo de la variación de la acción

Queremos calcular las ecuaciones que se deducen de la acción

$$S[g] = -\frac{c^4}{16\pi G}\int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4 x - \frac{c^4}{8\pi G}\int K\sqrt{|h|}\,\mathrm{d}^3 y + \int \mathcal{L}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4 x \tag{17}$$

Fijémonos que esta acción es equivalente a la acción EHGHY si sustituimos R por $R' = R - 2\Lambda$. Como Λ es una constante, la variación de R' es idéntica a la variación de R. Por lo que, haciendo todas la variaciones que son idénticas a EHGHY, nos queda

$$\delta S = -\frac{c^4}{16\pi G}\int (R - 2\Lambda)\delta\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4 x - \frac{c^4}{16\pi G}\int \delta g^{\alpha\beta}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4 x \tag{18}$$

$$= -\frac{c^4}{16\pi G}\int \delta g^{\alpha\beta}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha\beta}}{2}(R - 2\Lambda) - \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4 x \tag{19}$$

Por lo tanto

$$R_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha\beta}}{2}(R - 2\Lambda) - \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} = 0 \Longrightarrow R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \tag{20}$$

Que son justamente las ecuaciones de Einstein con la constante cosmologica.

[1] Voy a hacer los cálculos solo para $r \neq 0$.